نشریه تابش و فناوری هسته ای، سال اول، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۳

مدل ابرشاره تعمیم یافته در محاسبه پارامتر چگالی ترازهای هسته ای

مهدی سلطانی[1*] ، سکینه جعفری[2]

[1] استادیار فیزیک، گروه فیزیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر

[2] کارشناس ارشد فیزیک هسته ای، گروه فیزیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر

(تاریخ دریافت مقاله:۹۳/۲/۲ – تاریخ پذیرش مقاله:۹۳/۵/۲۵)

چکیده

در این تحقیق از مدل ابرشاره‌ی تعمیم‌یافته برای یافتن پارامترهای چگالی ترازهای هسته‌ای استفاده می‌شود. بدین منظور یک انرژی بحرانی تعریف می‌گردد. برای نواحی پایین و بالای این انرژی، روابطی متفاوت برای چگالی تراز هسته‌ای به‌کار برده می‌شود. با استفاده از روش برازش کمترین مربعات روابط فوق با داده‌های تجربی تطبیق داده می‌شوند، و کمیت‌های مورد نیاز برای توصیف چگالی تراز محاسبه می‌گردند. در نهایت پارامترهای چگالی تراز بدست می‌آیند.

واژه‌های کلیدی: پارامتر چگالی تراز، انرژی انتقال‌یافته، ابرشاره تعمیم‌یافته

۱. مقدمه

چگالی ترازهای انرژی هسته‌ای یکی از ویژگی‌های مختص هر هسته می‌باشد که اهمیت و کاربرد آن، طیف وسیعی از حوزه-ها از اختر فیزیک تا پزشکی هسته‌ای را در بر می‌گیرد، و کمیتی اساسی در بررسی آماری هسته به عنوان یک سیستم بس‌ذره‌ای است، به‌طوری‌که تمام کمیت‌های ترمودینامیکی هسته از آن استخراج می‌شوند. به‌علاوه این کمیت نقشی تعیین کننده در آنالیز آماری واکنش‌های هسته‌ای دارد و در محاسبه‌ی سطح مقطع واکنش‌هایی مانند تشکیل هسته مرکب و واکنش‌های پیش‌تعادلی و هم‌چنین محاسبه‌ی سرعت واپاشی گامای هسته‌های به شدت برانگیخته، نقش مهمی ایفا می‌کند و به دلیل اهمیت آن، از اولین روزهای فیزیک هسته‌ای بسیار مورد توجه بوده است.

* مؤلف مسؤل: بوشهر، دانشگاه خلیج فارس، دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک، کد پستی ۷۵۱۶۹-۱۳۷۹۸
پست الکترونیکی: soltani@pgu.ac.ir

اولین بار بت در سال ۱۹۳۶، چگالی تراز هسته‌ای را بر اساس مدل گاز فرمی و با رهیافتی آماری محاسبه نمود و فرمول تحلیلی ساده‌ای برای آن ارائه کرد[۱]. در استخراج فرمول بت از یک مدل ذره مستقل همراه با تقریب‌ها و ساده‌سازی‌هایی استفاده شده است که باعث می‌شود انطباق قابل قبولی با داده‌های آزمایشگاهی نداشته باشد و بنابراین نیاز به مدل‌ها و روش‌های واقع‌بینانه‌تر احساس شود. پس از آن تلاش‌های بسیاری، چه به‌صورت آزمایشگاهی و چه به‌صورت نظری در این زمینه صورت گرفت که با وارد کردن اثراتی چون برهمکنش‌های باقیمانده، اثرات لایه‌ای، اثرات جفت‌شدگی و اثرات تغییرشکل، منجر به ارائه‌ی مدل‌هایی پدیدارشناختی مانند مدل دما- ثابت[1](CTM)، مدل گاز فرمی جابه جا شده به عقب[2](BSFGM) و مدل ابرشاره‌ی تعمیم‌یافته[3](GSM) گردید[۴-۲]. برای چگالی حالت‌های برانگیخته گاز فرمی برای هسته‌ای با Z پروتون، N نوترون در انرژی برانگیختگی U از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد[۲]:

$$\rho\,(Z,N,U)=\frac{\sqrt{\pi}}{24a^{\frac{1}{4}}U^{\frac{5}{4}}}exp\left(2\sqrt{aU}\right) \qquad (۱)$$

توصیف چگالی تراز برای عناصر جدول تناوبی با چند فرمول وابسته به A برای پارامترها، امکان‌پذیر است، که پارامترها برای هر هسته به مقادیر بهینه، که داده‌های تجربی برای آن هسته‌ها را بازتولید می‌کنند، تطبیق داده می‌شوند. باید توجه داشت که خاصیت پدیدارشناختی مدل‌های تحلیلی مستلزم این است که هیچ پارامتری به‌عنوان پارامتر چگالی تراز a عمومی وجود نداشته باشد، چون a وابسته به مدل است. از این رو، قبول پارامتر چگالی تراز a، در مدل‌های چگالی تراز بدون تعیین کردن تصحیح انرژی زوجیت، پارامتر قطع اسپین، و وقتی وابستگی کامل به انرژی مورد نظر باشد، تصحیح لایه‌ای و پارامتر میرایی بی‌فایده است.

۲. مدل ابرشاره تعمیم‌یافته

مدل ابر شاره تعمیم یافته همبستگی‌های جفت شده ابررسانایی را بر طبق نظریه باردن – کوپر – شریفر[4] درنظر می‌گیرد. نمونه پدیدارشناختی این مدل[۴] به‌وسیله‌ی یک گذار فاز از رفتار ابرشاره در انرژی پایین، که همبستگی‌های جفت شده به شدت بر چگالی تراز تأثیر گذارند، تا ناحیه انرژی زیاد که به‌وسیله‌ی BSFGM توصیف می‌شود، مشخص شده است. بنابراین GSM به CTM تا آن‌جا که بین ناحیه‌ی انرژی پایین و ناحیه‌ی انرژی زیاد تمایز می‌گذارد، شباهت دارد، اگرچه این تمایز برای GSM به‌صورت طبیعی از تئوری می‌آید و همانند CTM به ترازهای گسسته‌ی خاص که یک انرژی تطبیقی را تعیین می‌کنند، بستگی ندارد. درعوض این مدل به‌طور خودبه‌خودی رفتاری همانند دمای ثابت در انرژی‌های پایین را به‌دست می‌دهد. فرمول کلی(۱) برای چگالی تراز کل مفید است، که برای GSM دو شکل، یکی پایین و دیگری بالای انرژی بحرانی U_c دارد. برای انرژی‌های زیر U_c، چگالی تراز برحسب توابع ترمودینامیکی تعریف شده در U_c، توصیف می‌شوند، که به صورت زیر داده می‌شود[۵]:

$$U_c = a_c T_c^2 + E_{cond.} \qquad (۲)$$

در اینجا ،دمای بحرانی T_c برابر است با:

$$T_c = 0.567\Delta_0, \qquad (۳)$$

و تابع همبستگی جفت‌شده به‌صورت زیرداده می‌شود:

$$\Delta_0 = \frac{12}{\sqrt{A}} \qquad (۴)$$

این تابع همبستگی انرژی چگالش E_{cond} را تعیین می‌کند، که کاهش فاز ابرشاره نسبت به فاز گاز فرمی را توصیف می‌کند و به صورت زیر داده می‌شود:

$$E_{cond} = \frac{3}{2\pi^2}a_c\Delta_0^2, \qquad (۵)$$

1- Constant temperature model
2- Back shifted Fermi gas model
3- Generalized super fluid model
4- Bardeen, Cooper and Schrieffer theory

پارامتر چگالی تراز بحرانی a_c با استفاده از معادله تکراری زیر داده می‌شود[۶]:

$$a_c = \tilde{a}\left[1 + \delta W \frac{1-exp(-\gamma a_c T_c^2)}{a_c T_c^2}\right], \quad (۶)$$

که به آسانی با داشتن $\tilde{a}$، δW و γ به‌دست می‌آید. در این‌جا $\tilde{a}$ پارامتر مجانب چگالی تراز است که در غیاب اثرات لایه‌ای به‌دست می‌آید. هم‌چنین به‌ازای تمام انرژی برانگیختگی E اگر $\delta W = 0$ باشد $\tilde{a} = a(E)$ می‌شود. پارامتر میرایی γ مشخص می‌کند که $a(E)$ با چه سرعتی به سمت $\tilde{a}$ میل می‌کند. δW تصحیح انرژی لایه‌ای است. مقدار قدرمطلق δW مشخص می‌کند که در انرژی‌های پایین چه اختلافی بین $a(E)$ و $\tilde{a}$ وجود دارد و علامت δW مشخص می‌کند که در چه جاهایی $a(E)$ برحسب E افزایش یا کاهش می‌یابد. مقدار $\tilde{a}$ توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\tilde{a} = \alpha A + \beta A^{\frac{1}{3}} \quad (۷)$$

که در آن A عدد جرمی است. برای γ، رابطه‌ی زیر وجود دارد:

$$\gamma = \frac{\gamma_1}{A^{\frac{1}{3}}} \quad (۸)$$

در روابط فوق پارامترهای α و β و γ_1 پارامترهای کلی هستند که برای توصیف بهترین چگالی تراز برای هسته‌ها مشخص می‌شوند. برای تعیین چگالی تراز به عبارتی برای آنتروپی بحرانی S_c، دترمینان بحرانی D_c، و پارامتر قطع اسپین بحرانی σ_c^2، نیاز است،

$$S_c = 2a_c T_c, \quad (۹)$$

$$D_c = \frac{144}{\pi} a_c^3 T_c^5, \quad (۱۰)$$

$$\sigma_c^2 = 0.01389 A^{\frac{5}{3}} \frac{a_c}{\tilde{a}} T_c. \quad (۱۱)$$

اکنون که همه چیز در U_c مشخص شده است، می‌توان از معادله حالت ابرشاره برای تعریف چگالی تراز زیر U_c استفاده کرد. برای این منظور، یک انرژی برانگیختگی مؤثر تعریف می‌شود:

$$U' = E + \chi\Delta_0 + \delta, \quad (۱۲)$$

که δ یک پارامتر جابه‌جایی تنظیم پذیر برای بدست آوردن بهترین توصیف داده‌های تجربی هر هسته است، و

$$\chi = \begin{cases} 2 & \text{فرد} - \text{فرد} \\ 1 & \text{زوج} - \text{فرد} \\ 0 & \text{زوج} - \text{زوج} \end{cases} \quad (۱۳)$$

کمیت φ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$\varphi^2 = 1 - \frac{U'}{U_c}, \quad (۱۴)$$

برای $U' \le U_c$ کمیت‌های φ و T از ابرشاره پیروی می‌کنند[۴]،

$$\varphi = \tanh\left(\frac{T_c}{T}\varphi\right), \quad (۱۵)$$

که معادل است با:

$$T = 2T_c\varphi\left[\frac{\ln(1+\varphi)}{1-\varphi}\right]^{-1} \quad (۱۶)$$

توابع دیگر برای $U' \le U_c$ آنتروپی S، دترمینان D، و پارامتر قطع اسپین σ^2، می‌باشند[۴].

$$S = S_c\frac{T_c}{T}(1-\varphi^2) = S_c\frac{T_c}{T}\frac{U'}{U_c}, \quad (۱۷)$$

$$D = D_c(1-\varphi^2)(1+\varphi^2)^2 = D_c\frac{U'}{U_c}\left(2 - \frac{U'}{U_c}\right)^2, \quad (۱۸)$$

$$\sigma^2 = \sigma_c^2(1-\varphi^2) = \sigma_c^2\frac{U'}{U_c}. \quad (۱۹)$$

خلاصه، اکنون چگالی تراز برای تمام محدوده‌های انرژی می‌تواند تعیین شود. برای $U' \le U_c$، چگالی تراز کل به‌وسیله‌ی معادله (۱) داده می‌شود که همه‌ی اجزای آن بوسیله‌ی معادلات (۱۷) تا (۱۹) داده شده‌اند. برای $U' > U_c$، BSFGM، با یک انتقال انرژی متفاوت، اعمال می‌شود، یعنی انرژی برانگیختگی مؤثر بصورت $U = E - \Delta^{GSM}$ تعریف می‌شود، که در آن

$$\Delta^{GSM} = E_{cond} - \chi\Delta_0 - \delta \quad (۲۰)$$

می‌باشد.

۳. فرایند بهینه‌سازی

در انرژی‌های پایین، یک چگالی تراز مناسب باید ترازهای گسسته‌ی تجربی را بازتولید کند، و پارامترهای تنظیم‌پذیر باید

طوری تنظیم شوند که هم محدوده‌ی تراز گسسته و هم فواصل تشدید متوسط به‌خوبی بازتولید شوند. برای دنباله‌ی تراز گسسته، چگالی تراز کل ρ، طرح تراز گسسته‌ی از یک تراز پایین N_L با انرژی E_L تا یک تراز بالاتر N_U با انرژی E_U را توصیف می‌کند، یعنی:

$$N_U = N_L + \int_{E_L}^{E_U} dE\rho(E) \quad (۲۱)$$

سپس، تعداد ترازهای انباشته تا یک انرژی E به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{N}(E) = N_L + \int_{E_L}^{E} dE\rho(E) \quad (۲۲)$$

مرحله‌ی اول در فرایند بهینه‌سازی تعیین یک مجموعه‌ی ابتدایی از پارامترهای چگالی تراز کلی α و β و γ_1 ، همان‌طور که در معادلات (۷) و (۸) تعریف شده‌اند، است. برای این کار چند هسته انتخاب می‌شود و همه‌ی مقادیر تئوری با پارامترهای کلی محاسبه می‌شوند. جهت بهینه‌سازی کمیت زیر کمینه می‌گردد:

$$\chi^2 = \sum_{\mathrm{k=N_L}}^{\mathrm{N_U}} \frac{(\mathrm{N(E)-k})^2}{\mathrm{k}} \quad (۲۳)$$

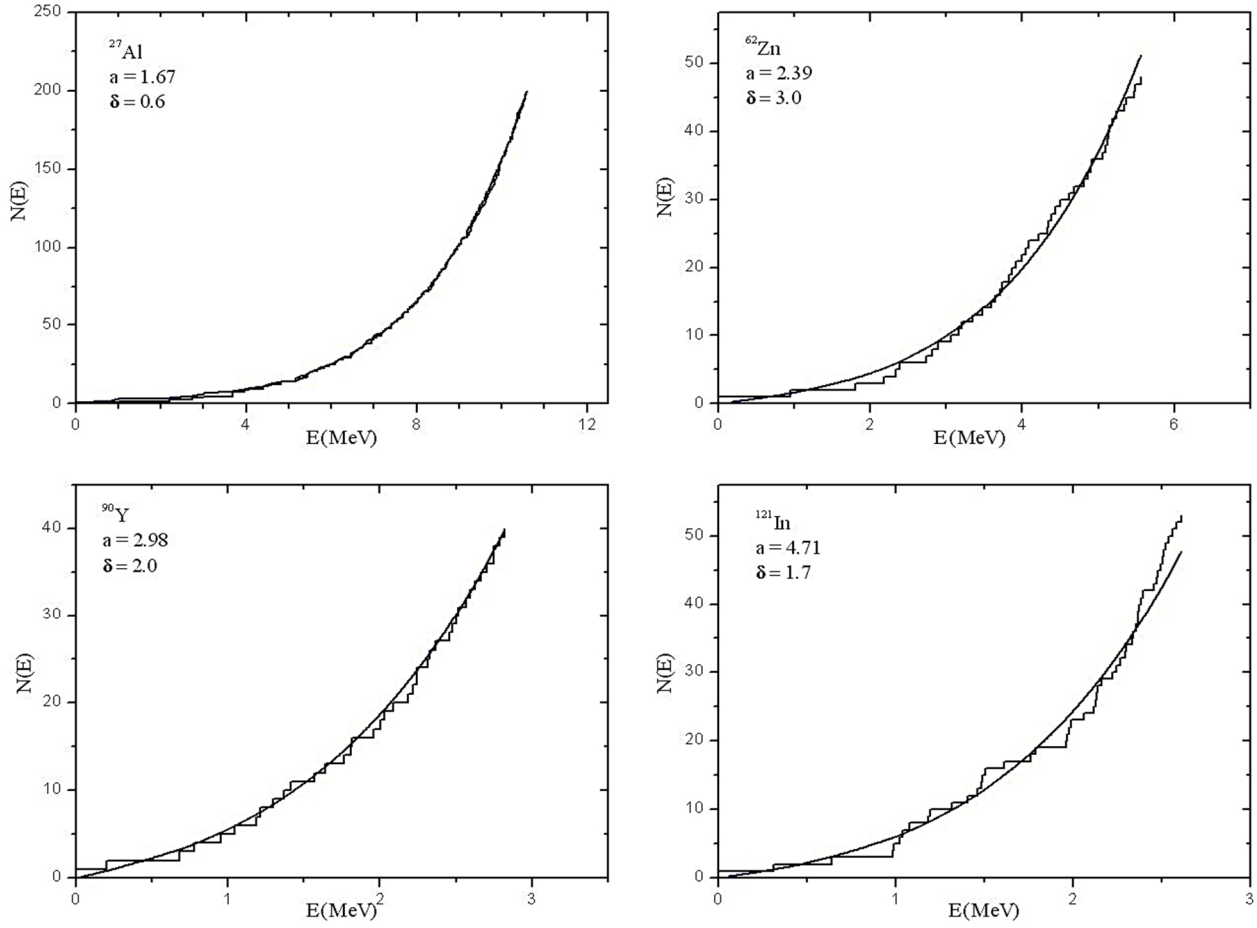
k تمام ترازهای گسسته را پوشش می‌دهد و عدد ترازهای جمع-آوری شده N تئوری از معادله‌ی (۲۲) محاسبه می‌شود. برای این‌که همه‌ی ترازها دارای وزن یکسانی باشند، k در مخرج معادله‌ی (۲۳) با $\mathrm{N_U} - \mathrm{N_L}$ جایگزین می‌شود. در تکرار اول برای پارامترهای کلی، هیچ اطلاع قبلی از مقادیر تراز گسسته‌ی N_L و N_U وجود ندارد. برای همه‌ی هسته‌ها از مقادیر اولیه‌ی N_L =۵ و N_U =۲۰ استفاده می‌شود، که می‌تواند نقطه‌ی شروع قابل قبولی باشد. با این‌حال در تکرار بعدی بهینه‌سازی پارامترهای کلی، این مقادیر به‌وسیله‌ی نقاط N_L و N_U به‌دست آمده از بهینه‌سازی پارامترهای موضعی جایگزین خواهند شد. برای تعیین کردن پارامترهای α، β و γ_1 ، مقدار χ^2 کمینه می‌شود. مجموعه‌ی اولیه از پارامترهای کلی α، β و γ_1 که در بالا به‌دست آمده‌اند مقادیر ابتدایی برای a و δ را به‌وجود می‌آورند. بهینه‌سازی پارامترهای چگالی تراز موضعی که اکنون شامل تنظیم ۴ پارامتر N_L ، N_U ، a و δ است، به‌طور هم‌زمان توصیف بهینه‌ای از ترازهای گسسته‌ی بین N_L و N_U برای هر هسته را می‌دهد. یکی از دلایلی که دامنه‌ی گسترده‌ای برای N_L مجاز است دو دلیل دارد: اول، باید از اثرات تجمعی در ترازهای پایین، برای تاثیر نادرست چگالی تراز، اجتناب کرد، و دوم، در محاسبات مدل آماری، چند تراز اول را صریحا در یک مدل هاوسر- فشباخ وارد محاسبه می‌کنند، به‌طوری که تطابق خوبی به‌وسیله‌ی یک مدل چگالی تراز برای این ترازها، در یک محاسبه‌ی برهمکنش هسته‌ای واقعی، به‌دست نمی‌آید. همان طور که قبلا ذکر شد، نوبت به بهینه‌سازی پارامترهای کلی α، β و γ_1 می‌رسد که، اکنون از مقادیر تراز گسسته‌ی N_L و N_U ، که از تحلیل موضعی به‌دست آمده است، استفاده می‌شود. پارامترهای کلی اندکی تغییر می‌کند. سرانجام، دوباره بهینه‌سازی پارامترهای موضعی، اما اکنون با پارامترهای کلی نهایی به‌عنوان مقادیر آغازی برای پیدا کردن پارامترها، تکرار می‌شود.

۴. نتایج

پارامتر چگالی تراز برای تمام هسته‌های موجود در جدول ۱ طبق روش ذکر شده در بخش قبل محاسبه شده است. مقادیر به‌دست آمده حاصل از بهینه‌سازی با استفاده از داده‌های در دسترس[۷] برای α، β، γ_1 و U_c در این جدول آورده شده است. با استفاده از داده‌های فوق و روابط موجود، مقادیر پارامتر چگالی تراز، a و انرژی انتقال یافته به عقب، δ برای عناصر مورد نظر محاسبه گردیده است. نتایج فوق نیز در جدول ۱ به نمایش درآمده است. شکل ۱ نمونه‌ای از محاسبات انجام شده را نمایش می‌دهد و تطابق داده‌های تجربی و مقادیر محاسبه شده قابل توجه است.

جدول۱. پارامترهای چگالی تراز محاسبه شده در مدل ابرشاره تعمیم‌یافته

Element	A	α	β	γ_1	U_c	a (MeV^{-1})	δ(MeV)
Mg	۲۵	۰/۰۸	۰/۰۱	۰/۲۹	۴/۸۵۵	۱/۷۸	۰/۹
Al	۲۷	۰/۰۵	۰/۱	۰/۴	۴/۳۲۶	۱/۶۷	۰/۶
Al	۲۸	۰/۰۲	۰/۱۴	۰/۱۶	۴/۰۶۹	۱/۶۷	۳
P	۳۰	۰/۰۷	۰/۰۱	۰/۳۶	۲/۷۳۲	۱/۲۰	۲
K	۳۸	۰/۰۷	۰/۰۶	۰/۶۳	۴/۲۵۵	۲/۳۷	−۱
K	۴۰	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۶۲	۴/۶۹۹	۲/۷۵	۱
Ca	۴۸	۰	۰/۲۲	۰/۷۳	۳/۳۹۶	۲/۳۹	−۱
Sc	۴۸	۰/۰۱	۰/۲۱	۰/۵۵	۳/۷۷۶	۳/۳۴	۰/۳
Mn	۵۱	۰/۰۴	۰/۱	۰/۳۱	۳/۷۳۶	۲/۷۹	۱/۹
V	۵۱	۰	۰/۲	۰/۰۳	۳/۶۵۸	۲/۷۴	۲/۸
Cr	۵۴	۰/۰۳	۰/۱۶	۰/۷	۴/۷۲۲	۳/۷۴	−۰/۷
Fe	۵۶	۰/۰۴	۰/۱۷	۰/۷	۳/۹۴۰	۳/۲۴	۱
Zn	۶۲	۰/۰۴	۰/۰۲	۰/۲۷	۲/۶۳۳	۲/۳۹	۳
Ni	۶۵	۰/۰۲	۰/۰۷	۰/۹	۳/۱۰۷	۲/۹۶	۳
Rb	۸۶	۰/۰۳	۰/۰۵	۰/۶۳	۲/۰۹۳	۳/۸۰	۲
Sr	۸۷	۰/۰۴	۰/۰۹	۰/۱	۳/۴۲۸	۴/۳۷	۱
Mo	۹۰	۰/۰۶	۰/۰۲	۰/۱	۲/۴۲۹	۲/۹۸	۲
Y	۹۰	۰/۰۲	۰/۰۹	۰/۶۸	۲/۲۵۴	۲/۹۸	۲
Zr	۹۴	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۶	۲/۶۹۴	۳/۷۱	۲
In	۱۲۱	۰/۰۲	۰/۰۷	۰/۵۵	۲/۵۰۴	۴/۷۱	۱/۷



شکل ۱. مقایسه‌ی بین تعداد ترازهای هسته‌ای، N(E) تجربی (منحنی پله‌ای)[۷] و محاسبه شده از روش ابرشاره‌ی تعمیم‌یافته بر حسب انرژی برانگیختگی E

مراجع:

[1] H. A. Bethe, An attempt to calculate the number of energy levels of a heavy nucleus, *Phys Rev*, 50, 332-341, 1936.

[2] A. Gilbert, A. G. W. Cameron, A composite nuclear-level density formula with shell corrections, *Can J Phys*, 43, 1446- 1496, 1965.

[3] W. Dilg, W. Schantl, H. Vonach, and M. Uhl, Level density parameters for the Back-Shifted Fermi gas model in the mass range 40 < A < 250, *Nucl Phys A*, 217, 269- 298, 1973.

[4] A. Ignatyuk, K. K. Istekov, G. N. Smirenkin, Collective effects in level density and the probability of fission, *Sov J Nucl Phys*, 29(4), 450- 454, 1979.

[5] A. V. Ignatyuk, Statistical Properties of Excited Atomic Nuclei, IAEA, INDC- 233/L, 1985.

[6] S. Goriely, S. Hilaire, and A. J. Koning, Improved microscopic nuclear level densities within the Hartree-Fock-Bogoliubov plus combinatorial method, *Phys Rev C*, 78, 064307, 2008.

[7] Privet Communication, A. N. Behkami, W. Shu-Naun, Nuclear Data Group of the Atomic Energy Agency of China, 2000.

Journal of Radiation and Nuclear Technology

JRNT
Journal of Radiation and Nuclear Technology

Journal of Radiation and Nuclear Technology / Vol. 1 / No. 1 / summer 2014

Generalized superfluid model in calculating the nuclear level density parameters

M. Soltani[1*], S. Jaffari[2]

*1. Assistant professor, Department of Physics, Persian Gulf University, Bushehr**
2. M.Sc, Department of Physics, Persian Gulf University, Bushehr

** Corresponding author's E-mail: soltani@pgu.ac.ir*

(Received: 22/4/2014 -Accepted: 16/8/2014)

ABSTRACT

Nuclear level density parameters are obtained by using the generalized superfluid model. For this purpose a critical energy is defined. Different relationships for nuclear level density are used for below and above regions of critical energy. Least square fitting is used to match these relations to the experimental data, and the required quantities are calculated to describe the level density. Finally the level density parameters are obtained.

Keywords: *Level density parameter, transferred energy, generalized superfluid*